

# **La science quantique**

## **Une vision singulière**

### **III) Formalisme**

#### **Première partie**

P.A. Besse

«Bra-Ket»

Produit scalaire

et décomposition en modes propres

Fonction d'onde:

$$\psi(x, t) = \sum_i \psi_i \cdot \delta_i$$

$$\vec{\psi}^\dagger \equiv \vec{\psi}^T = (\dots \dots \dots \psi_{-3}^* \psi_{-2}^* \psi_{-1}^* \psi_0^* \psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \dots \dots)$$

Produit scalaire:

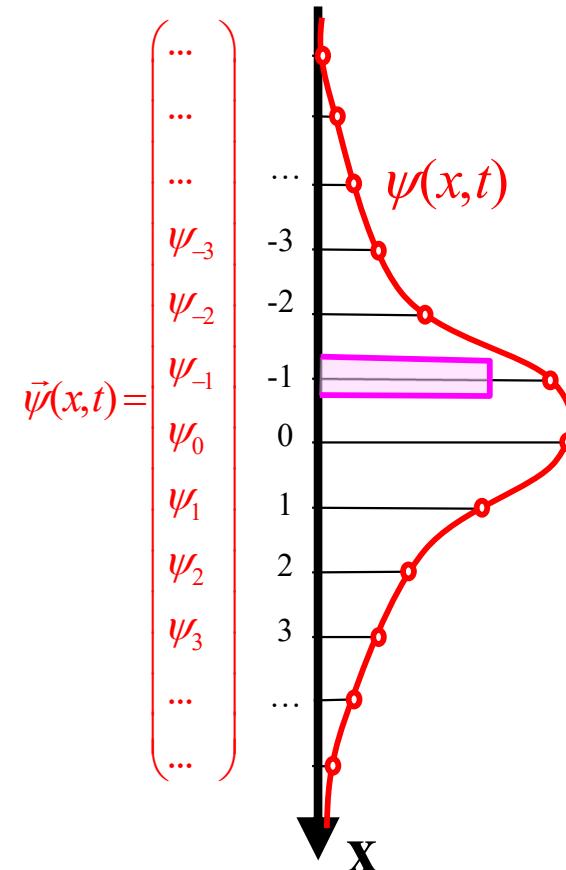
$$\vec{\psi}_1^\dagger \cdot \vec{\psi}_2 \equiv \sum_i \psi_{1i}^* \cdot \psi_{2i}$$

Norme:

$$\vec{\psi}^\dagger \cdot \vec{\psi} \equiv \sum_i |\psi_i|^2 = 1$$

Base orthonormée:

$$\delta_i \cdot \delta_j = \delta_{ij}$$



**La particule doit se trouver quelque part**

«Bra»

$$\langle \psi(x,t) | = ( \dots \dots \dots \psi_{-3}^* \psi_{-2}^* \psi_{-1}^* \psi_0^* \psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \dots \dots )$$

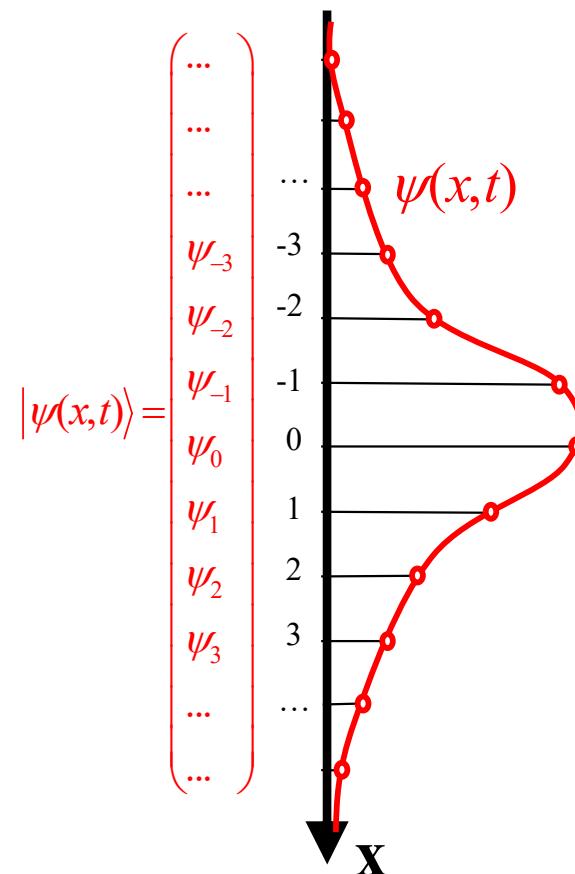
Normalisation

$$\langle \psi(x,t) | \psi(x,t) \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \cdot \psi_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \cdot \psi(x,t) \cdot dx = 1$$



La particule doit se trouver quelque part !

«Ket»



Fonction d'onde:

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i \cdot |\varphi_i\rangle \quad \langle\varphi_i| |\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$$

«Bra»

$$\langle\psi| = (\alpha_0^* \quad \alpha_1^* \quad \alpha_2^* \quad \alpha_3^* \quad \dots \quad \dots)$$

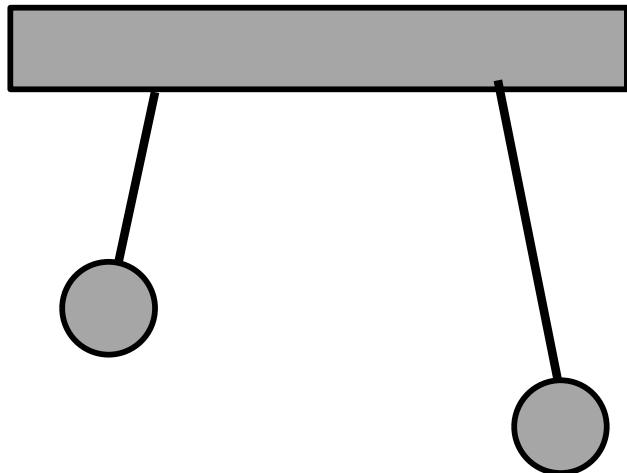
$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^* \cdot \alpha_i = 1$$

Base orthonormée:

«Ket»

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

## Exemple (1a): deux pendules indépendants

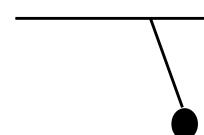
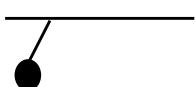


$$|\varphi_G\rangle$$

Mode propre  
de «Gauche»

$$|\varphi_D\rangle$$

Mode propre  
de «Droite»



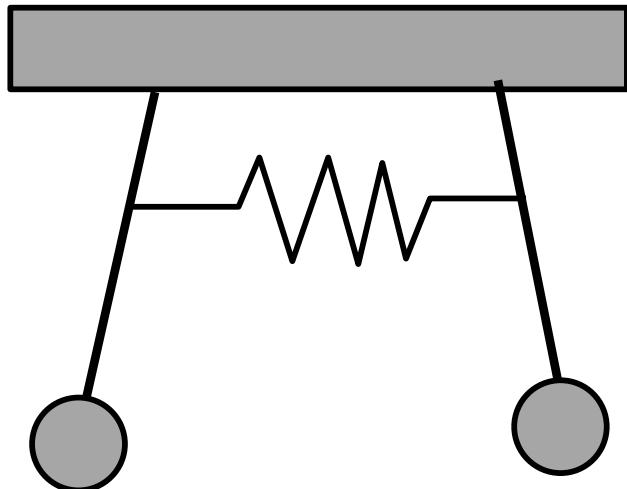
**Mode général:**

$$\psi = \alpha \cdot |\varphi_G\rangle + \beta \cdot |\varphi_D\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

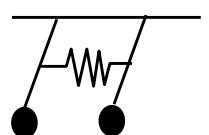
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

## Exemple (1b): deux pendules identiques couplés



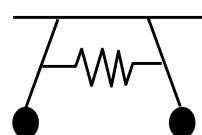
**Mode général:**

$$\psi = \bar{\alpha} \cdot |\varphi_S\rangle + \bar{\beta} \cdot |\varphi_A\rangle$$



$$|\varphi_S\rangle$$

Mode propre  
«Symétrique»



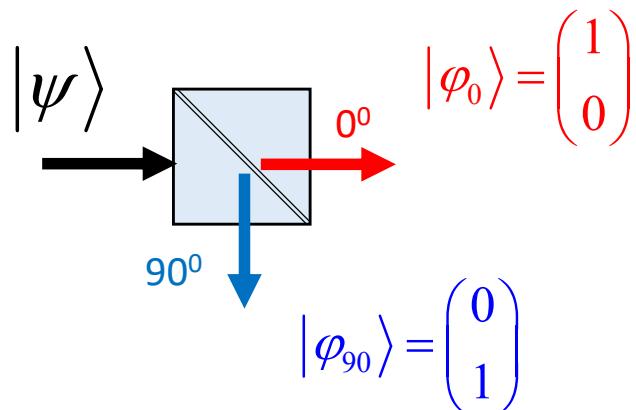
$$|\varphi_A\rangle$$

Mode propre  
«Anti-symétrique»

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$$

$$|\bar{\alpha}|^2 + |\bar{\beta}|^2 = 1$$

## Exemple (2): Polarisation



$$\psi = \alpha \cdot |\varphi_0\rangle + \beta \cdot |\varphi_{90}\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_{90}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

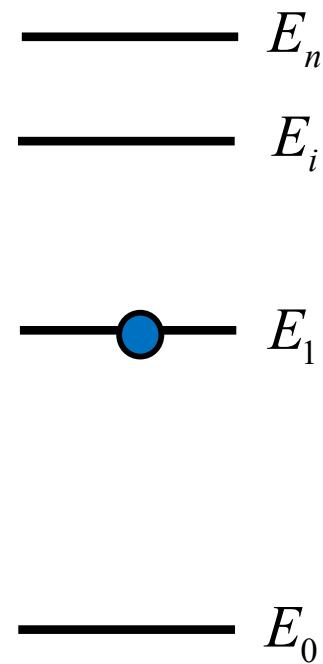
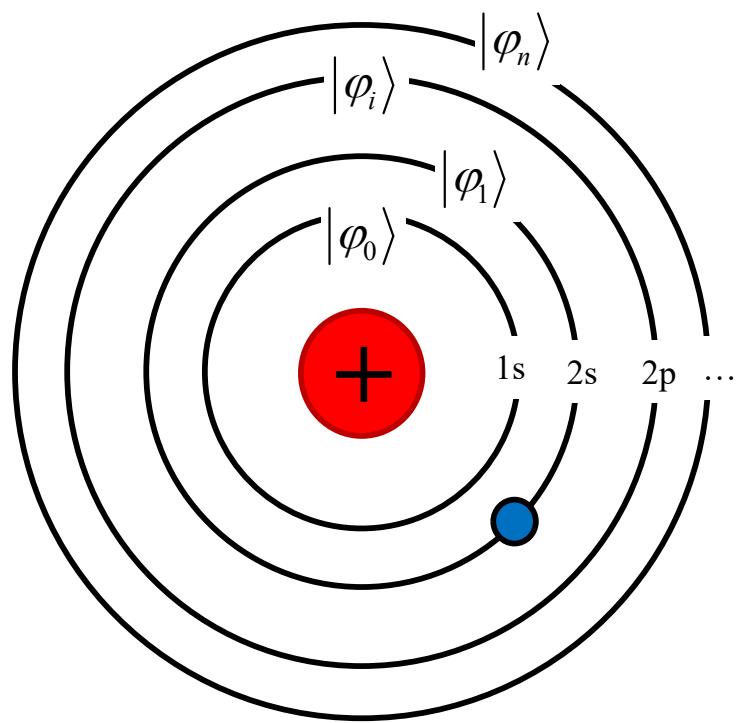
$$|\psi_{+45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|\psi_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

## Exemple (3): niveaux atomiques



$$\psi = \sum_i \alpha_i \cdot |\varphi_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

## Mode général

$$\psi = \sum_i \alpha_i \cdot |\varphi_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \dots \\ \alpha_i \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Coefficients dans  
la base des  
modes propres

Produit scalaire

$$\langle \varphi_i | \psi \rangle = \alpha_i$$

Probabilité d'être dans  
le mode propre  $|\varphi_i\rangle$

$$|\alpha_i|^2 = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2$$

«intensité»

$$(0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \dots \\ \alpha_i \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_i$$

Norme:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

## 1) Etats purs:

1a) Etats propres:

$$|\psi\rangle = \alpha \cdot |\varphi_1\rangle$$

L'état pur est un multiple d'un seul mode propre de l'opérateur A

1b) Etats superposés:

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i \cdot |\varphi_i\rangle$$

L'état superposé est la superposition **cohérente** de plusieurs modes propres de l'opérateur A

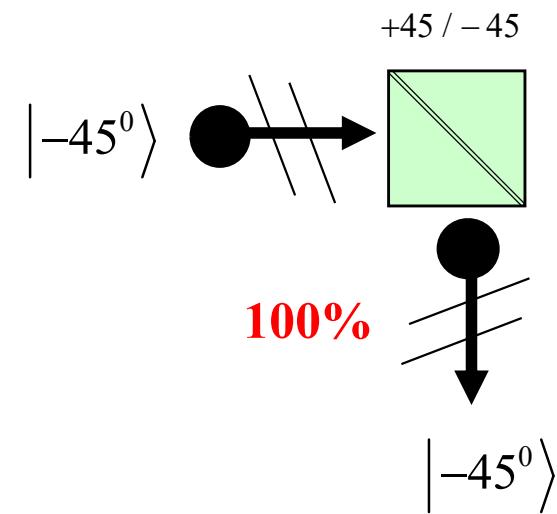
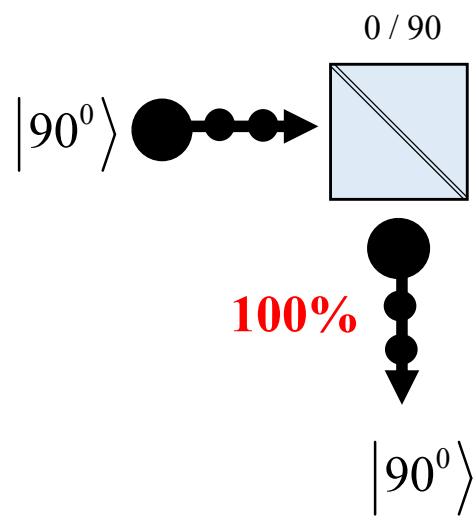
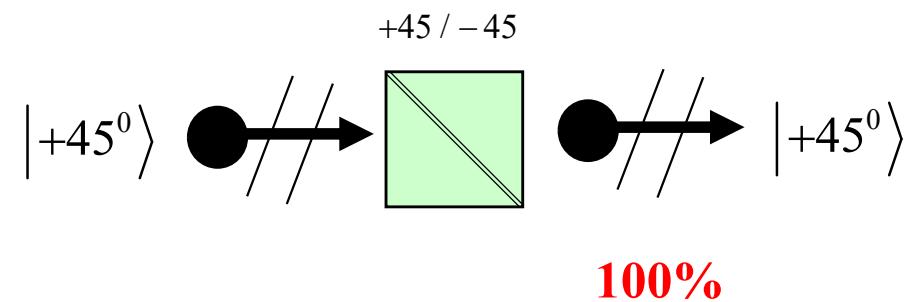
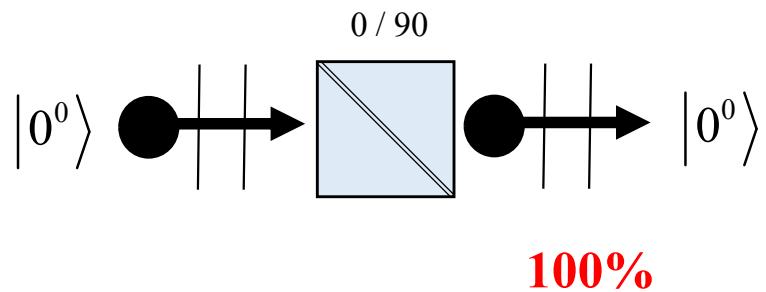
## 2) Etats mixtes:

$$|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \text{ ou } |\varphi_2\rangle$$

L'état mixte est la superposition **incohérente** de plusieurs modes propres de l'opérateur A

Décrit dans le formalisme des «matrices de densité»

# Exemple: modes propres



- Les modes propres dépendent du système de mesure choisi et de son orientation
- La fonction d'onde d'un mode propre est inchangée lors de la mesure
- Toutes les mesures singulières d'un mode propre donnent la même valeur.
- L'ensemble des modes propres d'un système forme une base orthogonale (qu'il faut aussi normer !).

## Etat superposé

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle$$

Probabilité de trouver la particule dans l'état  $|\varphi_i\rangle$

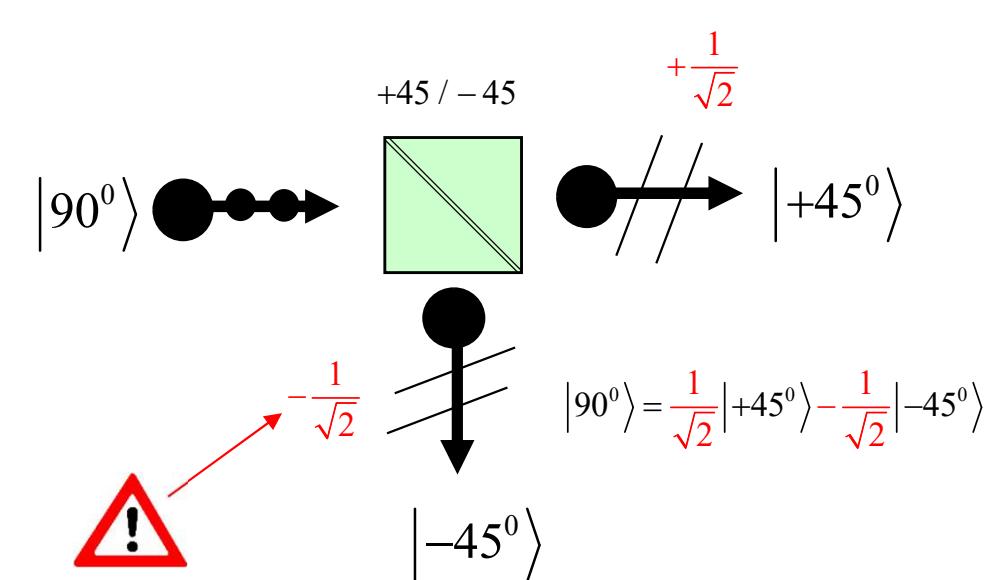
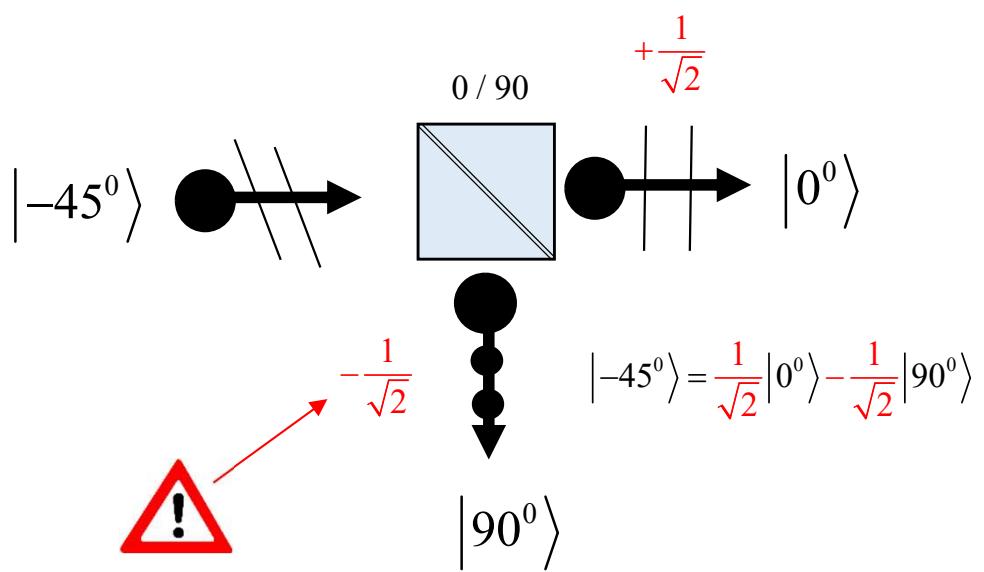
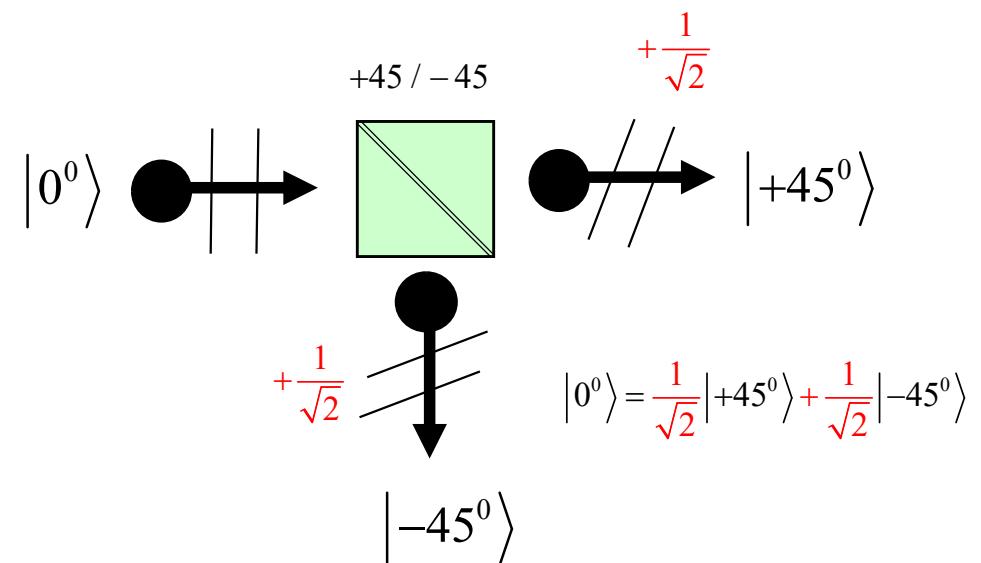
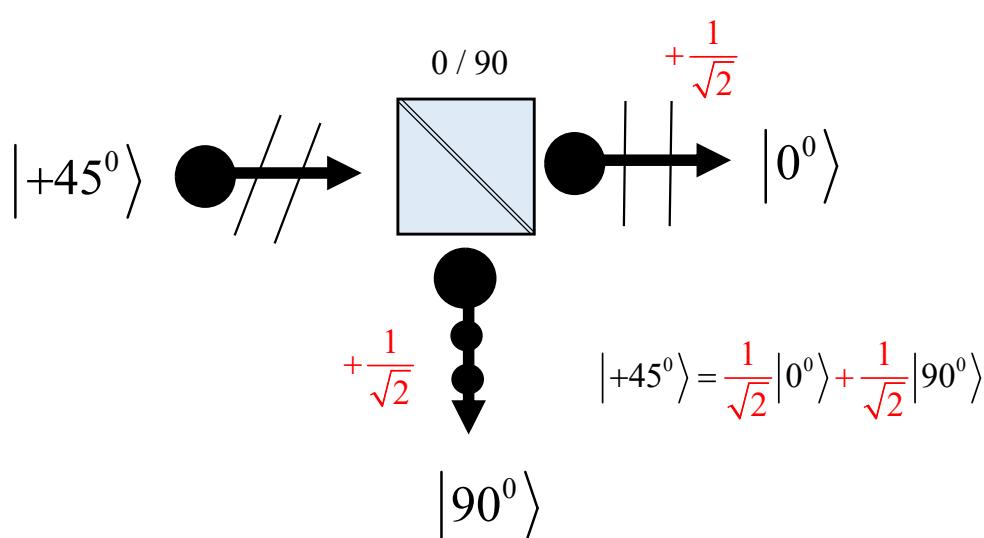
$$\langle \varphi_i | \psi \rangle = \alpha_i$$

**Coefficient en amplitude**

$$p_i = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2 = |\alpha_i|^2$$

**Probabilité = intensité**

# Exemple: modes superposés



# Interférences de deux états superposés

$$|\psi_1\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \sum_i \beta_i |\varphi_i\rangle$$

**Etat total**

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle = \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \cdot |\varphi_i\rangle$$

**Cohérents**

Probabilité de trouver la particule dans l'état  $|\varphi_i\rangle$

$$\langle \varphi_i | \psi \rangle = \alpha_i + \beta_i$$

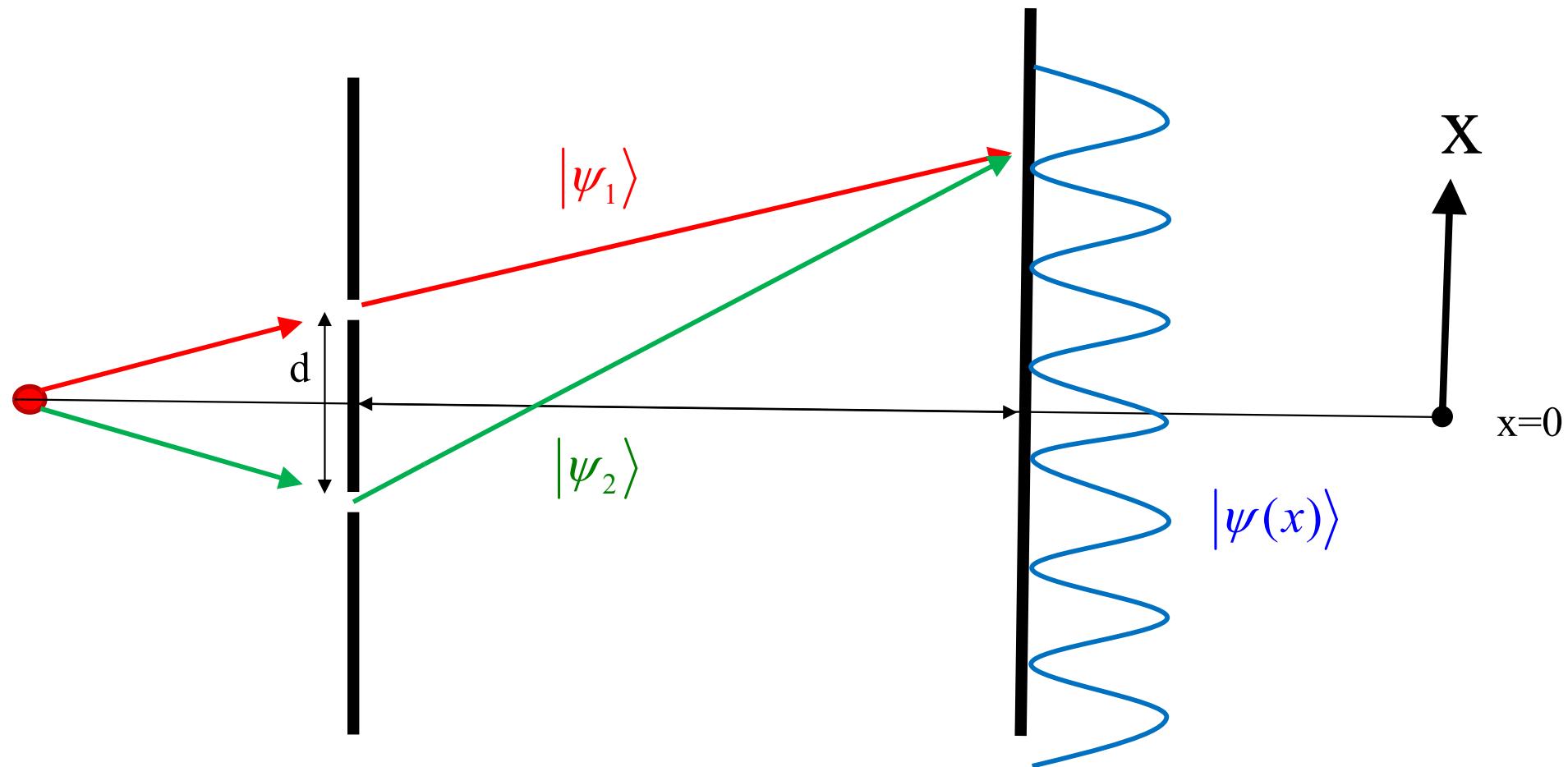
**Somme des amplitudes**

$$p_i = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2 = |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 + 2|\alpha_i| \cdot |\beta_i| \cdot \cos(\Delta\phi)$$

**Interférences**

# Exemple

## Interférences et fentes de Young



$$|\psi_1\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \sum_i \beta_i |\varphi_i\rangle$$

**Etat mixte**

$\varepsilon_{\%,1}$  en  $|\psi_1\rangle$  et  $\varepsilon_{\%,2}$  en  $|\psi_2\rangle$

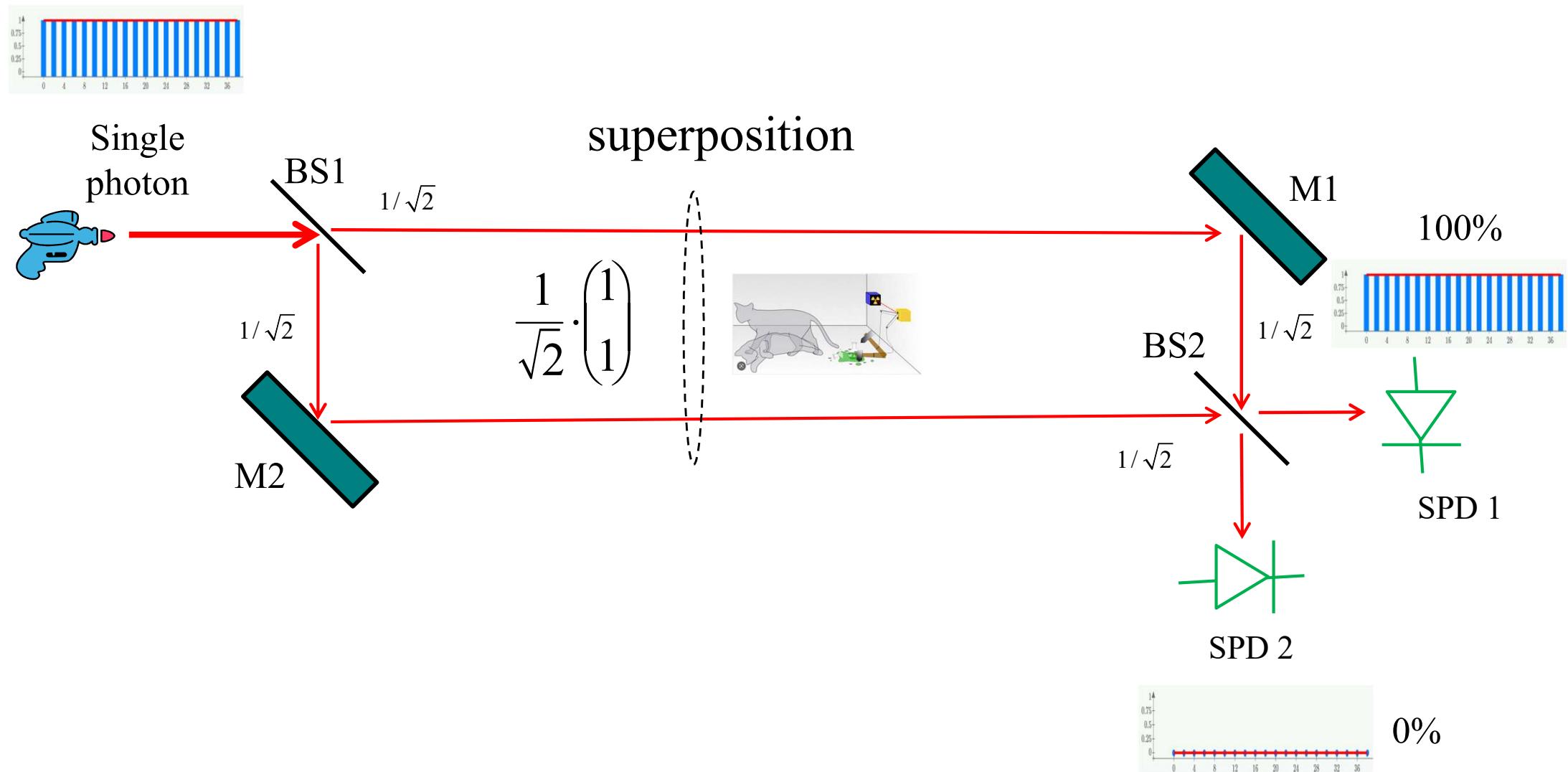
**Incohérents**

Probabilité de trouver la particule dans l'état  $|\varphi_i\rangle$

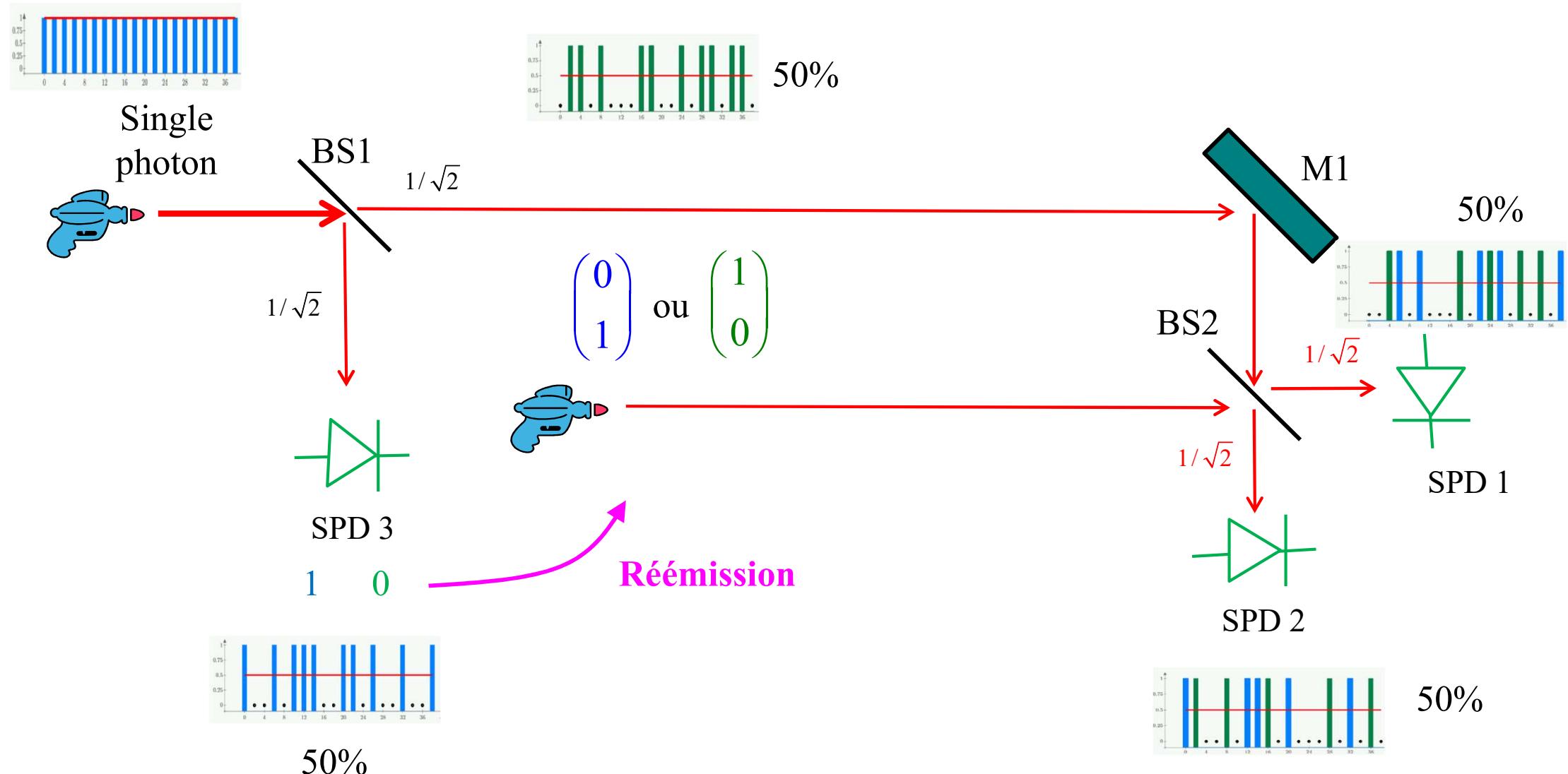
$$p_i = \varepsilon_{\%,1} \cdot |\langle \varphi_i | \psi_1 \rangle|^2 + \varepsilon_{\%,2} \cdot |\langle \varphi_i | \psi_2 \rangle|^2 = \varepsilon_{\%,1} \cdot |\alpha_i|^2 + \varepsilon_{\%,2} \cdot |\beta_i|^2$$

**Somme des intensités sans interférences**

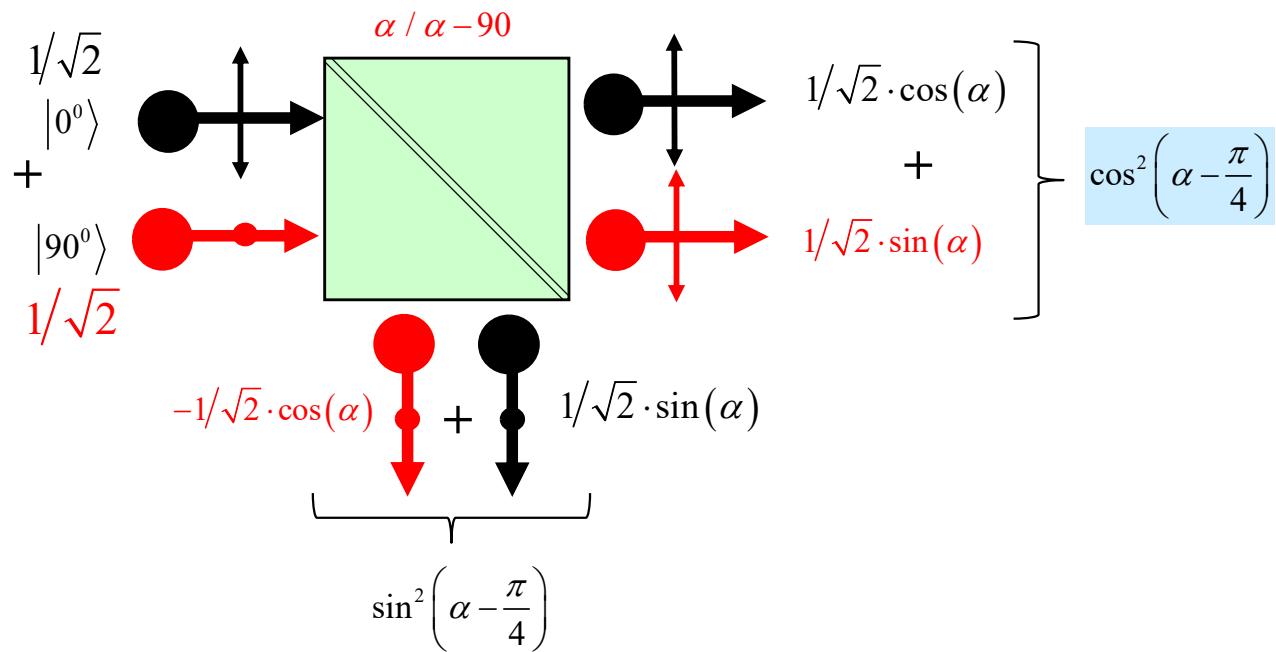
## Exemple 1a: mode superposé



## Exemple 1b: mode mixte



## Exemple 2a: mode superposé $|+45^\circ\rangle$

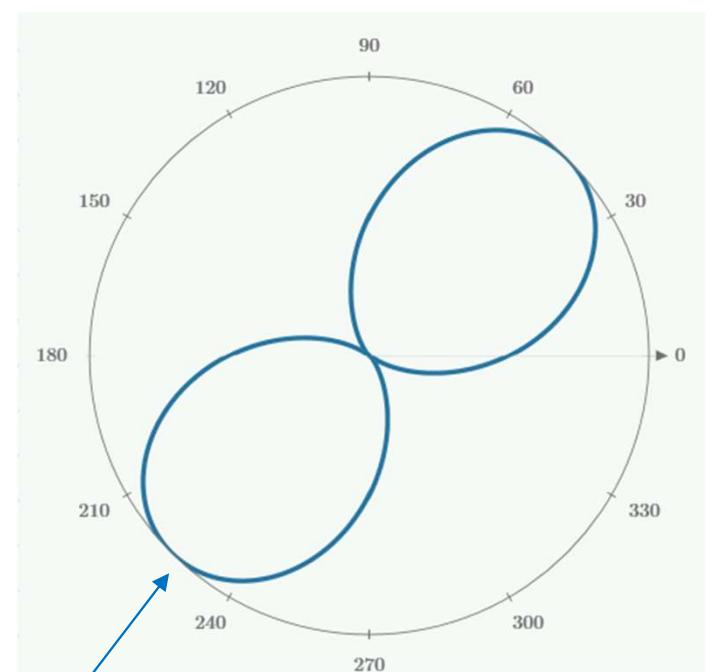


$$|0^\circ\rangle = \cos(\alpha) \cdot |\alpha^\circ\rangle + \sin(\alpha) \cdot |\alpha - 90^\circ\rangle$$

+

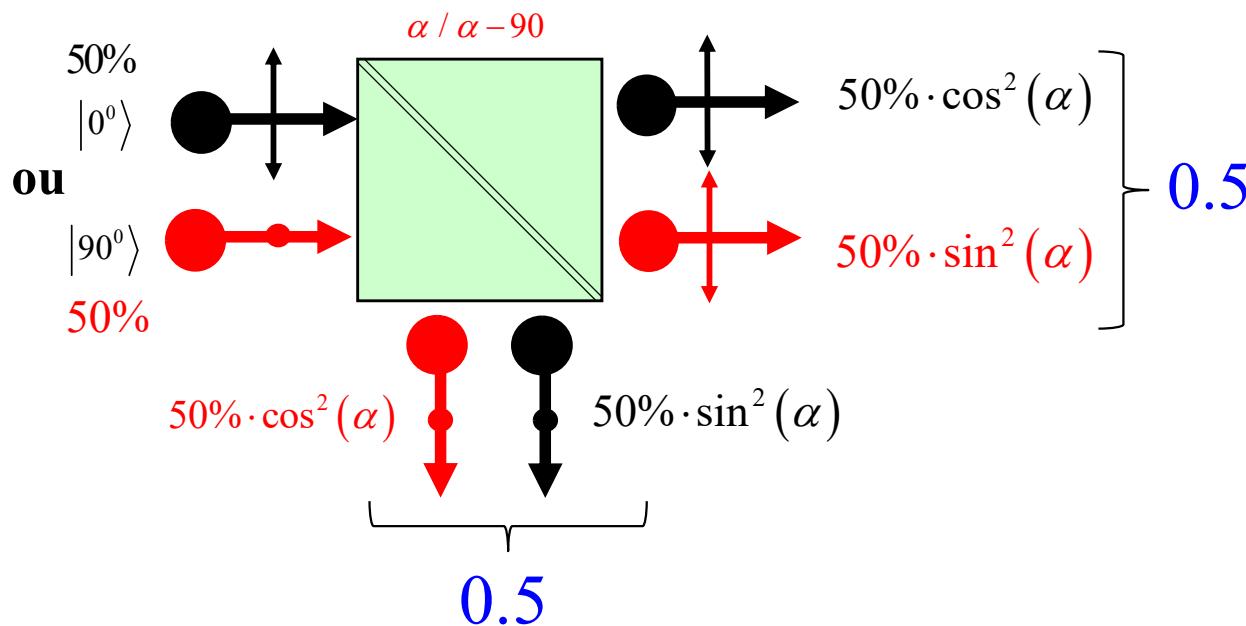
$$|90^\circ\rangle = \sin(\alpha) \cdot |\alpha^\circ\rangle - \cos(\alpha) \cdot |\alpha - 90^\circ\rangle$$

Intensité non-déviée:



$|+45^\circ\rangle$

## Exemple 2b: mode mixte

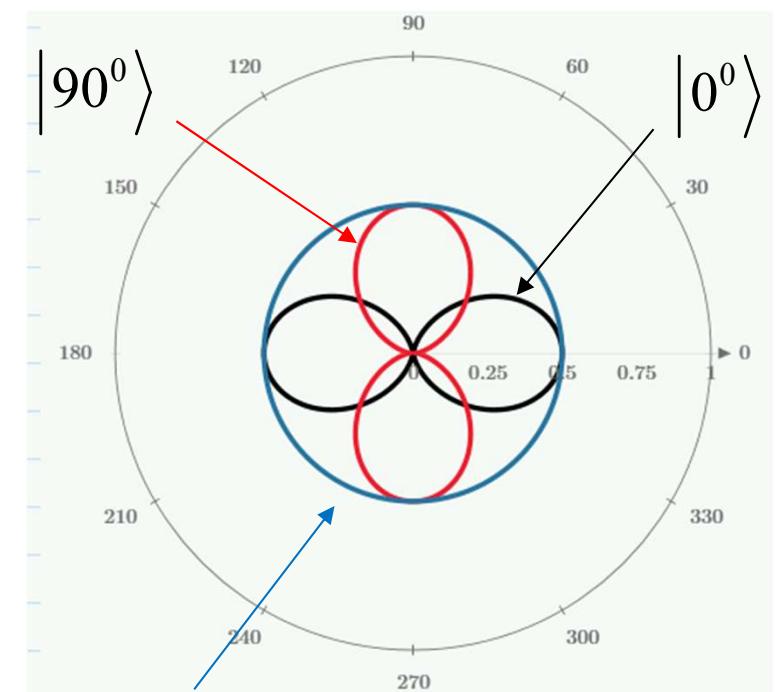


$$|0^0\rangle = \cos(\alpha) \cdot |\alpha^0\rangle + \sin(\alpha) \cdot |\alpha - 90^0\rangle$$

ou

$$|90^0\rangle = \sin(\alpha) \cdot |\alpha^0\rangle - \cos(\alpha) \cdot |\alpha - 90^0\rangle$$

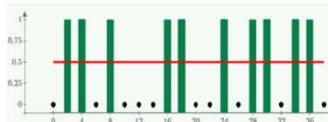
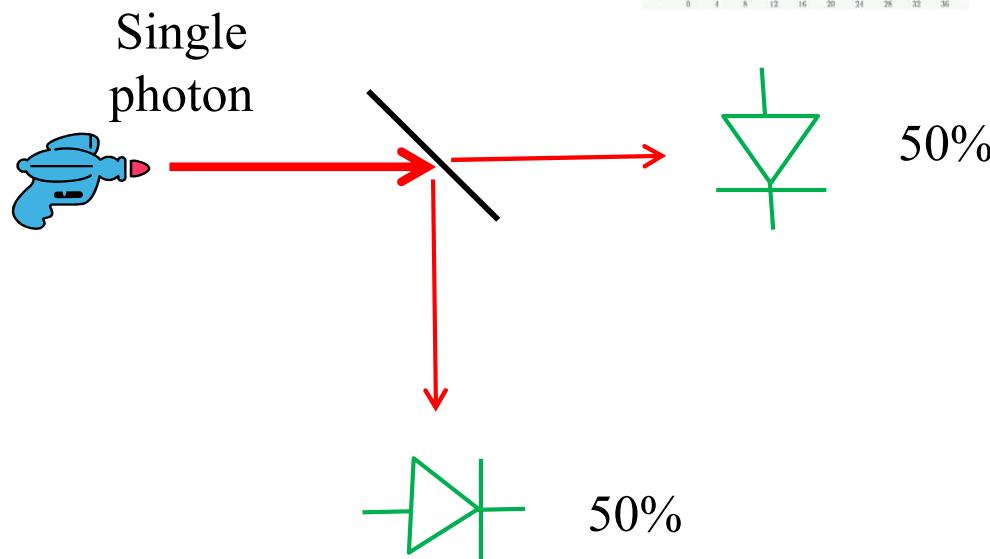
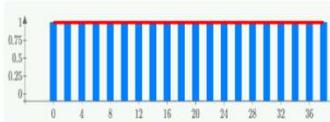
Intensité non-déviée:



**La phase entre les composantes est sans importance  
La rotation du polariseur n'influence pas les sorties**

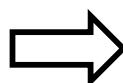
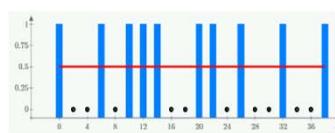
Mesures singulières  
et projecteurs

# Mesures singulières



Un «quantum» à l'entrée

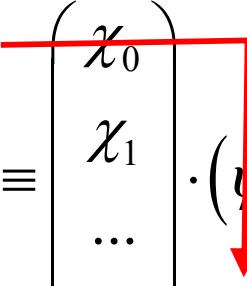
- Quel sera l'état à la sortie ?
- Avec quelle probabilité ?



Opérateur de mesure singulière

« projecteur »

## Produit extérieur

$$|\chi\rangle \cdot \langle \psi| \equiv \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \dots \\ \chi_n \end{pmatrix} \cdot (\psi_0^* \quad \psi_1^* \quad \dots \quad \psi_n^*) = \begin{pmatrix} \chi_0 \psi_0^* & \chi_0 \psi_1^* & \dots & \chi_0 \psi_n^* \\ \chi_1 \psi_0^* & \chi_1 \psi_1^* & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n \psi_0^* & \dots & \dots & \chi_n \psi_n^* \end{pmatrix}$$


## Produit extérieur

$$|\chi\rangle \cdot \langle \psi| \equiv \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \dots \\ \chi_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_0^* & \psi_1^* & \dots & \psi_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_0 \psi_0^* & \color{red}{\chi_0 \psi_1^*} & \dots & \chi_0 \psi_n^* \\ \chi_1 \psi_0^* & \chi_1 \psi_1^* & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n \psi_0^* & \dots & \dots & \chi_n \psi_n^* \end{pmatrix}$$

## Produit extérieur

$$|\chi\rangle \cdot \langle \psi| \equiv \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \dots \\ \chi_n \end{pmatrix} \cdot (\psi_0^* \quad \psi_1^* \quad \dots \quad \psi_n^*) = \begin{pmatrix} \chi_0 \psi_0^* & \chi_0 \psi_1^* & \dots & \chi_0 \psi_n^* \\ \chi_1 \psi_0^* & \chi_1 \psi_1^* & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n \psi_0^* & \dots & \dots & \chi_n \psi_n^* \end{pmatrix}$$

Projecteur:

**Projecteur = produit extérieur du mode propre correspondant**

$$P_i \equiv |\varphi_i\rangle \cdot \langle \varphi_i|$$

# Mesure singulière et projecteur

**Mesure singulière = Projection sur un mode propre de l'appareil de mesure**

**Projecteur = produit extérieur du mode propre correspondant**

Projecteur sur la sortie  $|\varphi_0\rangle$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow P_0 \cdot |\psi\rangle = \alpha \cdot |\varphi_0\rangle$$

$$P_0 \equiv |\varphi_0\rangle \cdot \langle \varphi_0|$$



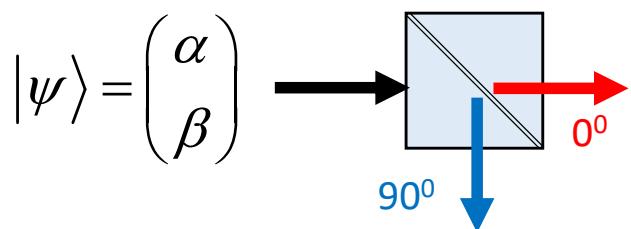
$$|\psi\rangle = \alpha \cdot |\varphi_0\rangle + \beta |\varphi_{90}\rangle$$

$$P_0 \cdot |\psi\rangle = |\varphi_0\rangle \cdot \langle \varphi_0| |\psi\rangle = \alpha \cdot |\varphi_0\rangle$$

**Mesure singulière = Projection sur un mode propre de l'appareil de mesure**

Projecteur sur la sortie  $|\varphi_{90}\rangle$

$$P_{90} \equiv |\varphi_{90}\rangle \cdot \langle \varphi_{90}|$$



$$P_{90} \cdot |\psi\rangle = \beta \cdot |\varphi_{90}\rangle$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ |\psi\rangle &= \alpha \cdot |\varphi_0\rangle + \beta \cdot |\varphi_{90}\rangle \\ P_{90} \cdot |\psi\rangle &= |\varphi_{90}\rangle \cdot \langle \varphi_{90}| |\psi\rangle = \beta \cdot |\varphi_{90}\rangle \end{aligned}$$

# Projecteur: exemple (1)

**Mesure singulière = Projection sur un mode propre de l'appareil de mesure**

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ } \rightarrow \text{ }} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \quad P_0 \cdot |\psi\rangle$$

$$P_{90} \cdot |\psi\rangle$$

$$P_0 \equiv |\varphi_0\rangle \cdot \langle \varphi_0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 \cdot |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{90} \equiv |\varphi_{90}\rangle \cdot \langle \varphi_{90}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{90} \cdot |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Projecteur: exemple (2)

**Mesure singulière = Projection sur un mode propre de l'appareil de mesure**

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \text{Diagram of a beam splitter} \\ \text{with two output paths:} \\ \text{+45}^{\circ} \text{ (red arrow)} \\ \text{-45}^{\circ} \text{ (blue arrow)} \end{array} P_{+45} \cdot |\psi\rangle$$

$$P_{-45} \cdot |\psi\rangle$$

$$P_{+45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$P_{+45} \cdot |\psi\rangle = ?$$

$$P_{-45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = ?$$

$$P_{-45} \cdot |\psi\rangle = ?$$

# Projecteur: exemple (2)

**Mesure singulière = Projection sur un mode propre de l'appareil de mesure**

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ } \rightarrow \text{ }} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \xrightarrow{\text{ } +45^\circ \text{ }} P_{+45} \cdot |\psi\rangle$$

$$\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{\text{ } -45^\circ \text{ }} P_{-45} \cdot |\psi\rangle$$

$$P_{+45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{+45} \cdot |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{-45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{-45} \cdot |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Projecteur: exemple (3)

Mesure singulière = Projection sur un mode propre de l'appareil de mesure

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ } \rightarrow \text{ }} \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{L} \end{array} \quad P_R \cdot |\psi\rangle$$

$$P_L \cdot |\psi\rangle$$

$$P_R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = ?$$

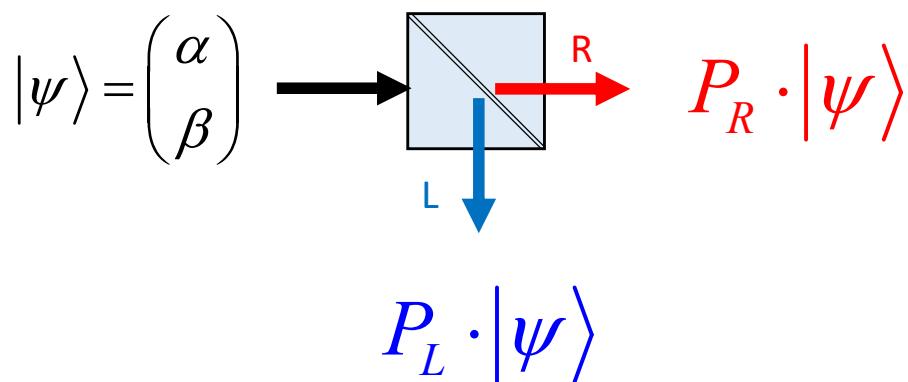
$$P_R \cdot |\psi\rangle = ?$$

$$P_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} = ?$$

$$P_L \cdot |\psi\rangle = ?$$

# Projecteur: exemple (3)

Mesure singulière = Projection sur un mode propre de l'appareil de mesure



$$P_R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_R \cdot |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - i\beta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$P_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_L \cdot |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + i\beta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

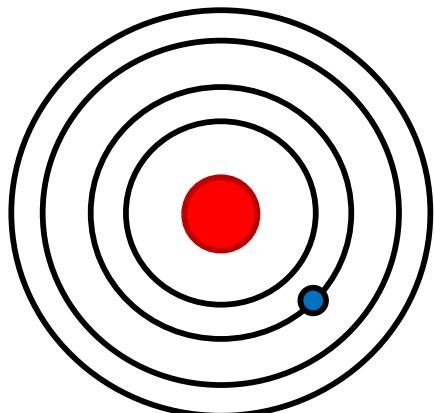
## Exemple (4): niveaux atomiques

—  $E_n$

—  $E_i$

— ●  $E_1$

—  $E_0$



$$\psi = \sum_i \alpha_i \cdot |\varphi_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_i \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$|\varphi_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$P_i \equiv ?$$

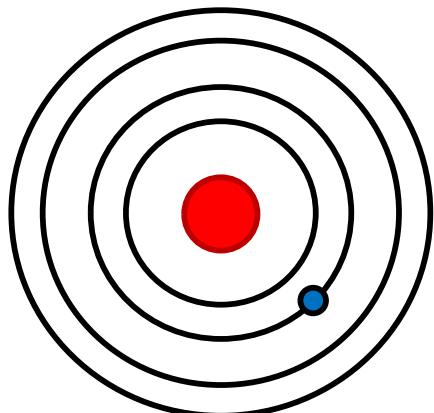
## Exemple (4): niveaux atomiques

—  $E_n$

—  $E_i$

—  $E_1$

—  $E_0$



$$\psi = \sum_i \alpha_i \cdot |\varphi_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_i \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$|\varphi_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



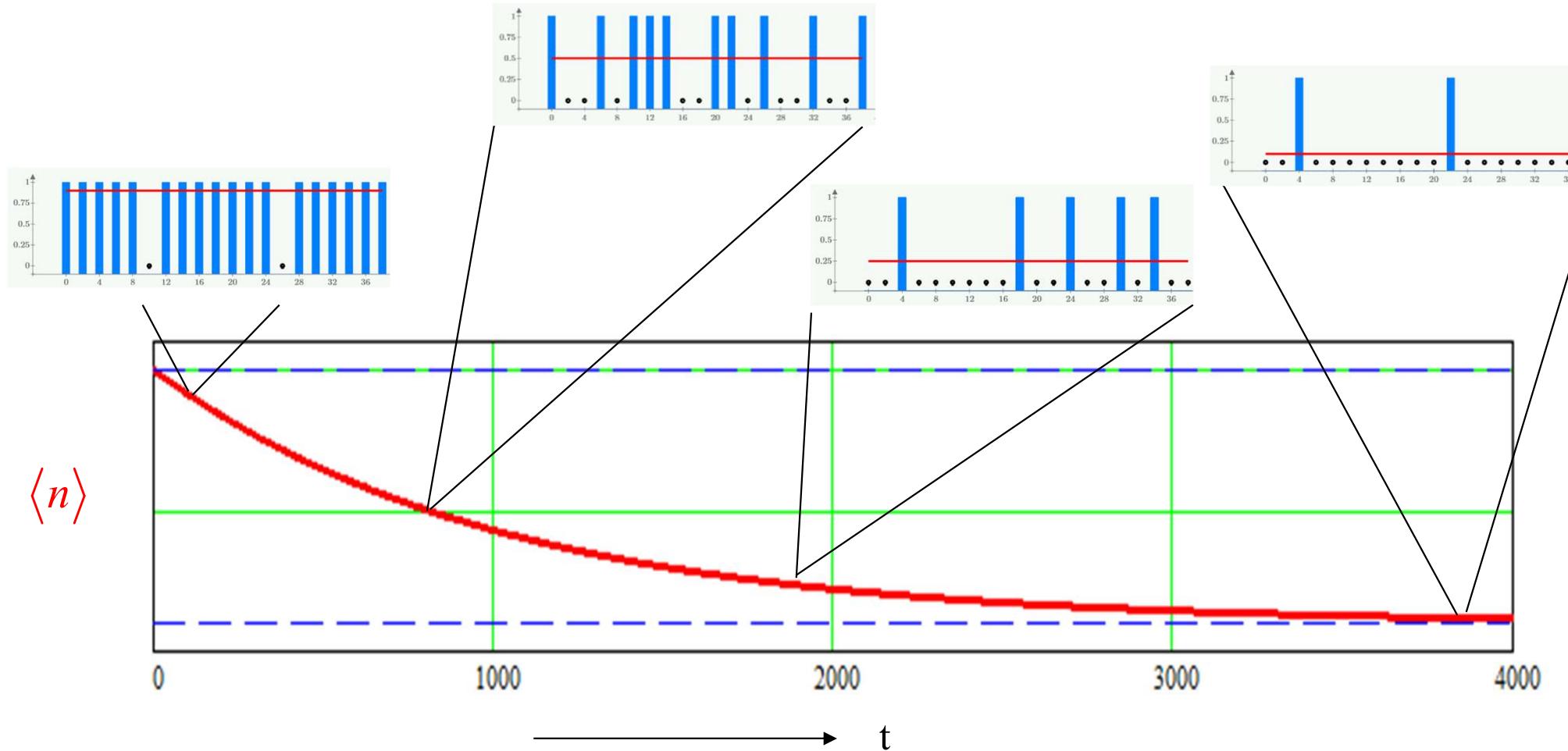
$$P_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Moyennes

Variances

Incertitudes

# Moyenne des mesures: exemple compteur Geiger

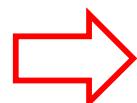


**Quel opérateur permet de calculer la moyenne des mesures ?**

Probabilité d'être dans  
le mode propre  $|\varphi_i\rangle$

Moyenne des mesures

$$|\alpha_i|^2 = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2$$



$$\langle M \rangle = \sum_i \lambda_i \cdot |\alpha_i|^2$$

Mesure obtenue avec  
ce mode propre  $|\varphi_i\rangle$

$$\lambda_i$$

## Opérateur de mesure (à partir des projecteurs)

Définition:

$$M = \sum_i \lambda_i \cdot P_i = \sum_i \lambda_i \cdot |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$$

Preuve:

$$\langle \psi | M | \psi \rangle = \sum_i \lambda_i \cdot \langle \psi | |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| | \psi \rangle$$

$$= \sum_i \lambda_i \cdot \alpha_i^* \cdot \alpha_i = \sum_i \lambda_i \cdot |\alpha_i|^2$$

$$= \langle M \rangle$$

# Polarisation 0/90: exemple (1)

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Polariseur}} P_0 \cdot |\psi\rangle$$

$$P_{90} \cdot |\psi\rangle$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_0 = +1$$



$$P_{90} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{90} = -1$$

Matrice de mesure de polarisation 0/90

$$\Rightarrow \sigma_z = \sum_{i=0,90} \lambda_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

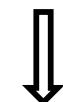
$$\langle \sigma_z \rangle = (\alpha^* \quad \beta^*) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

# Polarisation +45/-45: exemple (2)

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ } \rightarrow \text{ }} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \xrightarrow{\text{ } \rightarrow \text{ }} P_{+45} \cdot |\psi\rangle$$

$$P_{+45} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{+45} = +1$$

$$P_{-45} \cdot |\psi\rangle$$



$$P_{-45} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{-45} = -1$$

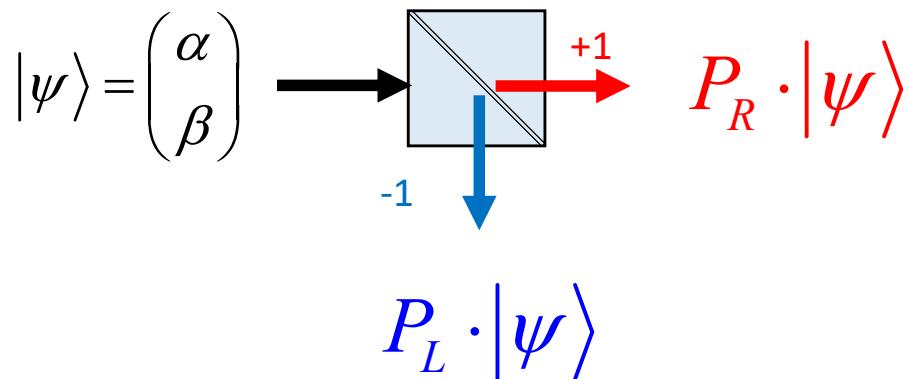
Matrice de mesure de polarisation +45/-45



$$\sigma_X = \sum_{i=+45, -45} \lambda_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \sigma_X \rangle = \alpha^* \beta + \alpha \beta^*$$

# Polarisation R/L: exemple (3)



$$P_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_R = +1$$



$$P_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_L = -1$$

Matrice de mesure de polarisation R/L

$$\Rightarrow \sigma_Y = \sum_{i=R,L} \lambda_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \sigma_Y \rangle = -i\alpha^*\beta + i\alpha\beta^*$$

Pour les systèmes à deux états quantiques: polarisations, les spins et les qubits, ...

**Identité et matrices de Pauli = base des matrices 2x2 hermitiennes**

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice 2x2 hermitienne :  $M = M^\dagger = M^{T^*}$

$$\Rightarrow M = r_1 \cdot \mathbf{1} + r_z \cdot \boldsymbol{\sigma}_Z + r_x \cdot \boldsymbol{\sigma}_X + r_y \cdot \boldsymbol{\sigma}_Y \quad \text{avec } r_i = \text{réels}$$

## Exemple (4): niveaux atomiques

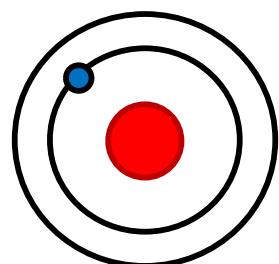
—  $E_1$

$P_0 \equiv ?$

$P_1 \equiv ?$

— ●  $E_0$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \xleftarrow{\hspace{-1cm}} |\varphi_0\rangle \\ \xleftarrow{\hspace{-1cm}} |\varphi_1\rangle \end{array}$$



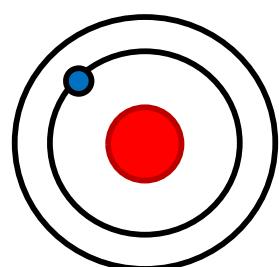
Opérateur Energie:

$H = ?$

## Exemple (4): niveaux atomiques

—  $E_1$

— ●  $E_0$



$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$|\varphi_0\rangle$   
 $|\varphi_1\rangle$

$$P_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

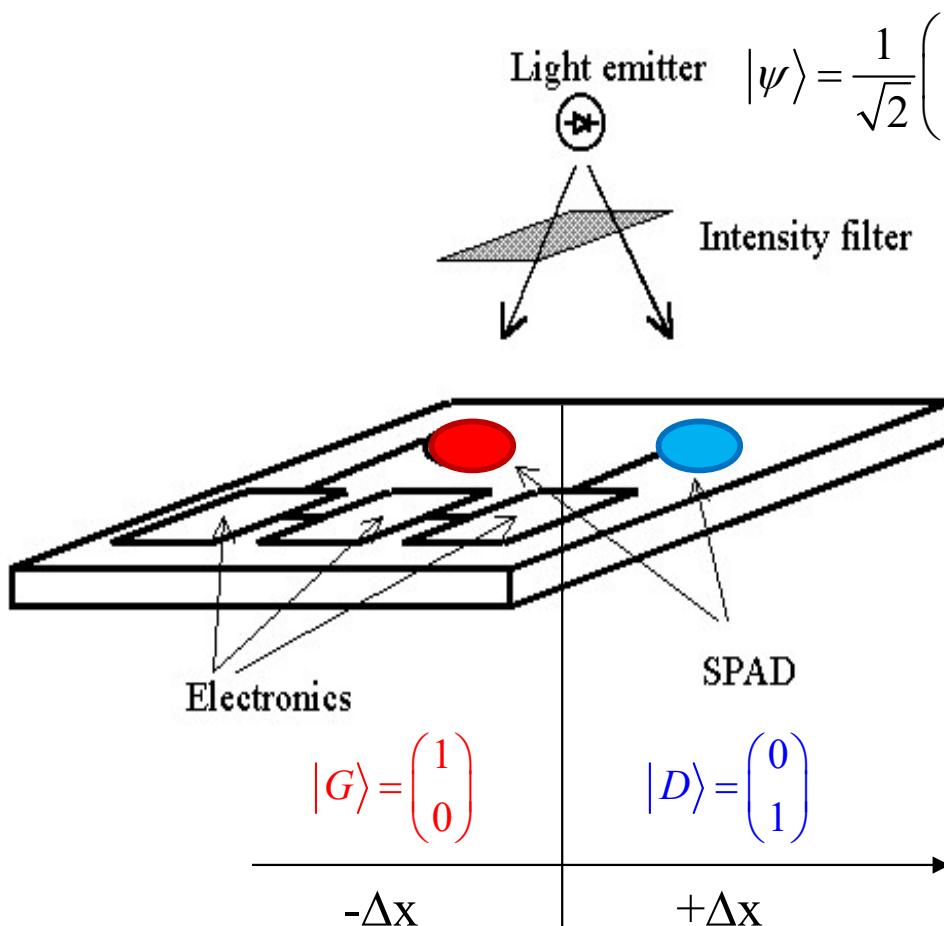
Opérateur Energie:

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

# Exemple (5): Random number quantum generator

CTI project with IdQuantique SA, Genève.

## Mesures singulières



### Projecteur «Gauche»:

$$|P_G\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_G = -\Delta x$$

$$|\psi_G\rangle = P_G \cdot |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Projecteur «Droit»:

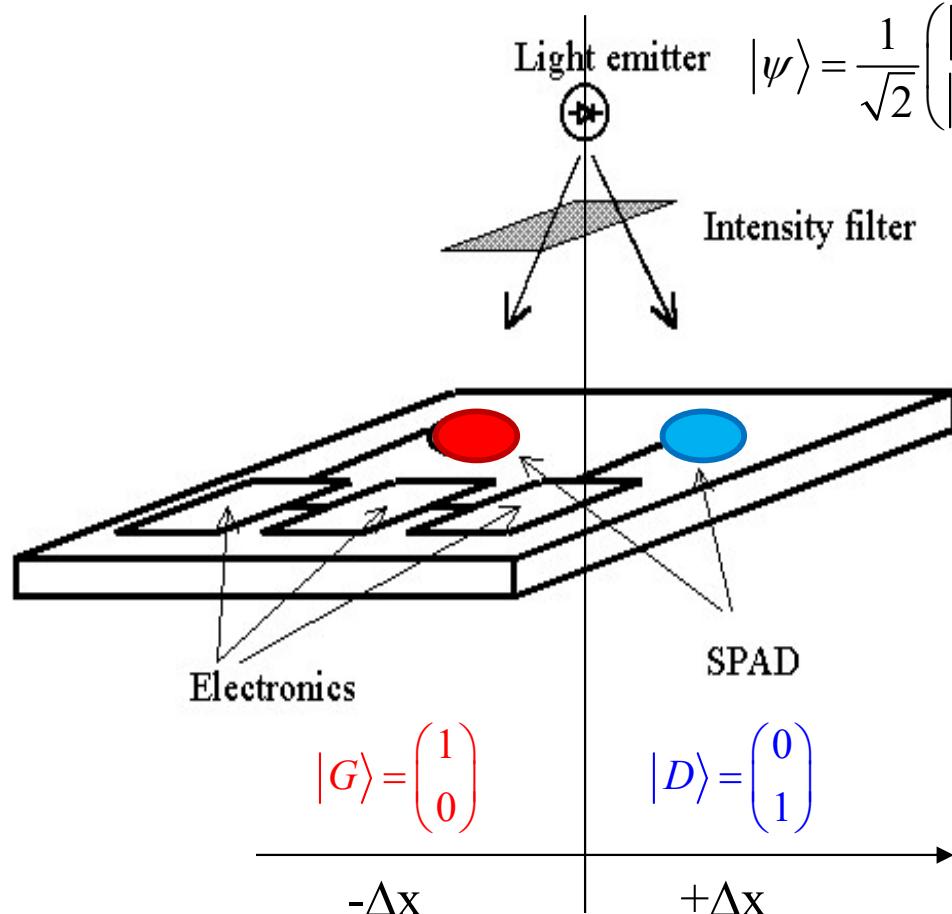
$$|P_D\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_D = +\Delta x$$

$$|\psi_D\rangle = P_D \cdot |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

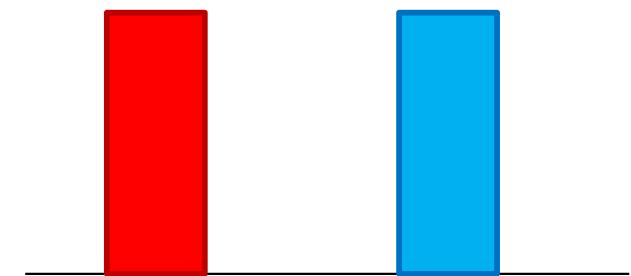
# Exemple (5): Random number quantum generator

CTI project with IdQuantique SA, Genève.

## Moyenne:



Histogramme



Opérateur position

$$X = \sum_{i=G,D} \lambda_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} -\Delta x & 0 \\ 0 & +\Delta x \end{pmatrix}$$

Moyenne

$$\langle \psi | X | \psi \rangle = 0$$

# Opérateurs de mesure

**Un «opérateur de mesure» est une manipulation mathématique de la fonction d'onde correspondant à une propriété physique mesurable de la particule.**

Vecteur position:

$$X = x$$

$$Y = y$$

$$Z = z$$

Vecteur impulsion:

$$P_x = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

$$P_y = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

$$P_z = -i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

Energie:

$$E = i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

Moment cinétique

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

Spin, polarisation

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Etat superposé / état mixte: moyenne des mesures

**Etat superposé:**

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \quad \langle M \rangle_1 \equiv \langle \psi_1 | M | \psi_1 \rangle$$

$$\langle M \rangle_2 \equiv \langle \psi_2 | M | \psi_2 \rangle$$

$$\langle M \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle = \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle \psi_1 | M | \psi_2 \rangle + \langle \psi_2 | M | \psi_1 \rangle$$

**Interférences**

**Etat mixte:**

$$\varepsilon_{\%,1} \text{ en } |\psi_1\rangle \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\%,2} \text{ en } |\psi_2\rangle$$

$$\langle M \rangle = \varepsilon_{\%,1} \cdot \langle \psi_1 | M | \psi_1 \rangle + \varepsilon_{\%,2} \cdot \langle \psi_2 | M | \psi_2 \rangle = \varepsilon_{\%,1} \cdot \langle M \rangle_1 + \varepsilon_{\%,2} \cdot \langle M \rangle_2$$

Moyenne d'un opérateur:

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi(x,t) | A | \psi(x,t) \rangle = \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \cdot A \cdot \psi_i}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \cdot \psi_i} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \cdot A \cdot \psi(x,t) \cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \cdot \psi(x,t) \cdot dx}$$

Second moment d'un opérateur:

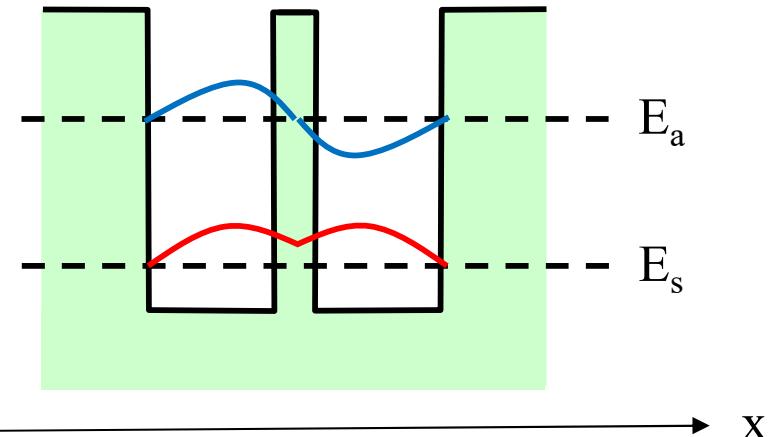
$$\langle A^2 \rangle \equiv \langle \psi(x,t) | A^2 | \psi(x,t) \rangle$$

Variance (incertitude) d'un opérateur:

$$\Delta A^2 \equiv \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

# Exercice 3.1: double puits couplés

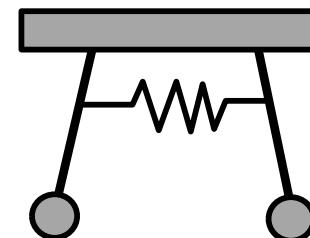
$$|\psi(x,t)\rangle \cong \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{«puits de gauche»} \\ \text{«puits de droite»} \end{matrix}$$



Soit les modes propres  $|\varphi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  d'énergie  $E_s$

$|\varphi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  d'énergie  $E_A$

Modèle



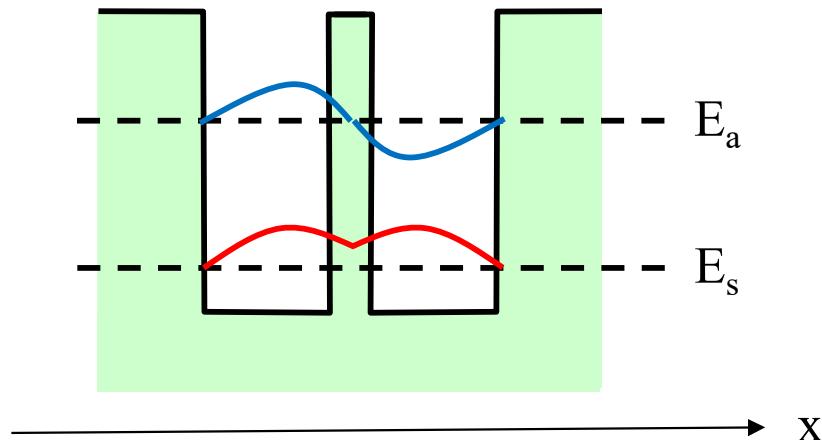
Déterminez l'Hamiltonien  $H = ?$

## Exercice 3.2: double puits couplé symétrique avec input à gauche

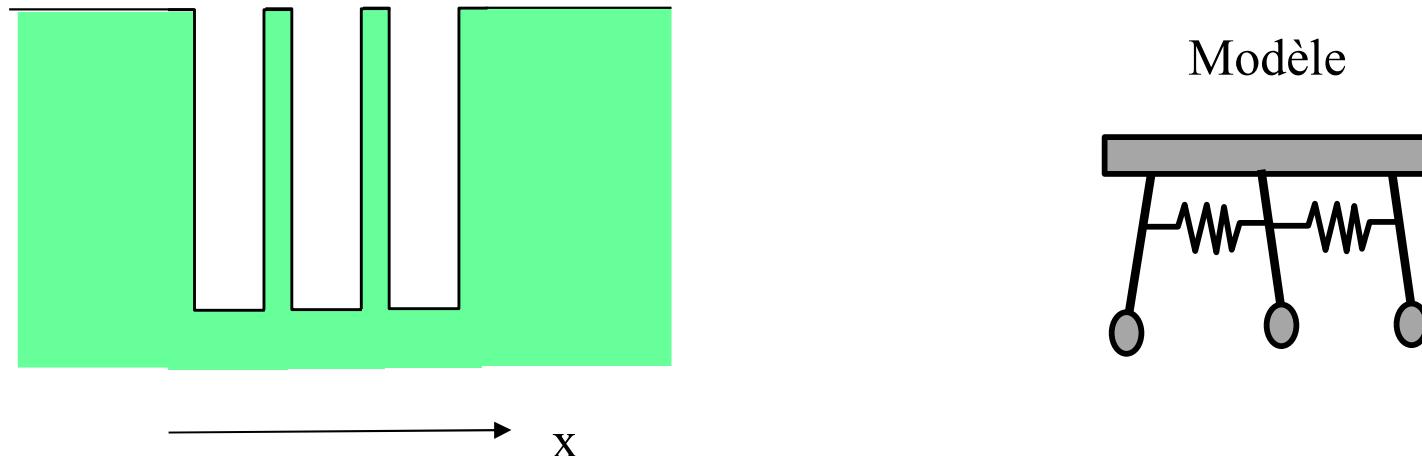
Décrivez l'évolution temporelle de la fonction d'onde d'un double puits couplé.  
En  $t=0$  l'entrée de gauche est excitée.

- Quelle est la probabilité d'être dans l'état de gauche en  $t>0$  ?
- Et dans l'état de droite ?

Comment évolue son énergie dans le temps ?

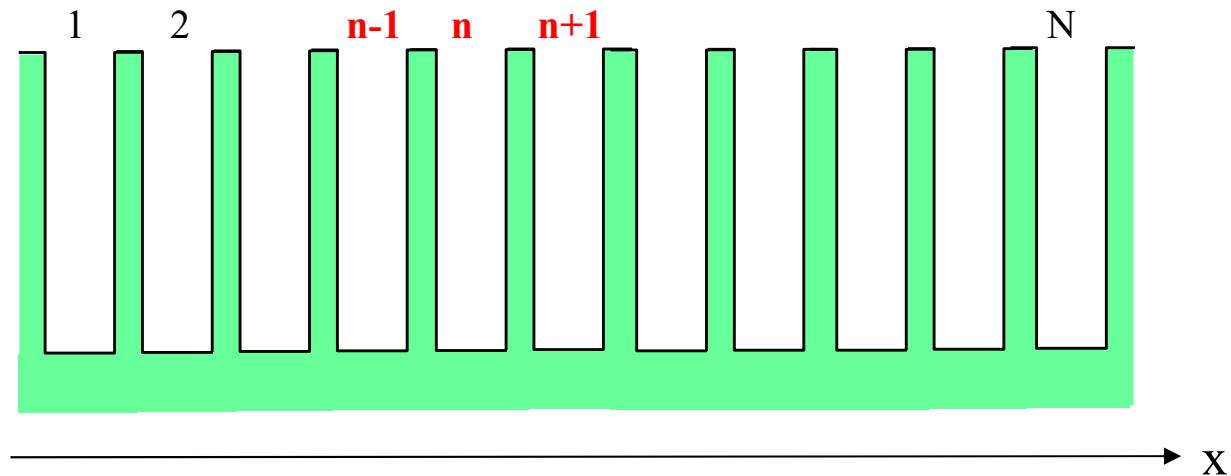


## Exercice 3.3: triple puits couplés

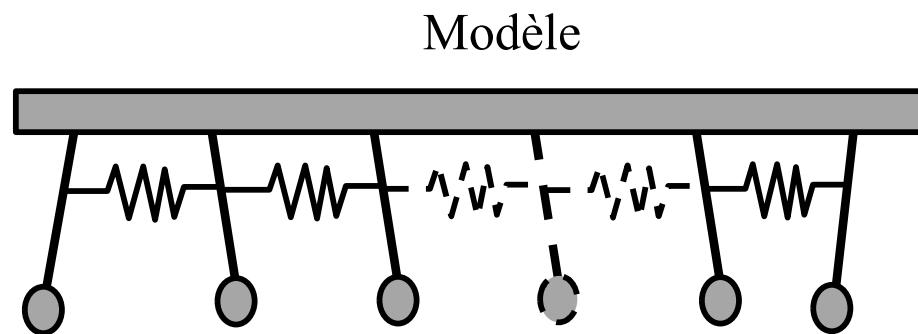


- Déterminer l'Hamiltonien de trois puits identiques couplés.
- Quels sont leurs modes propres et leurs énergies ?

## Exercice 3.4: N puits couplés

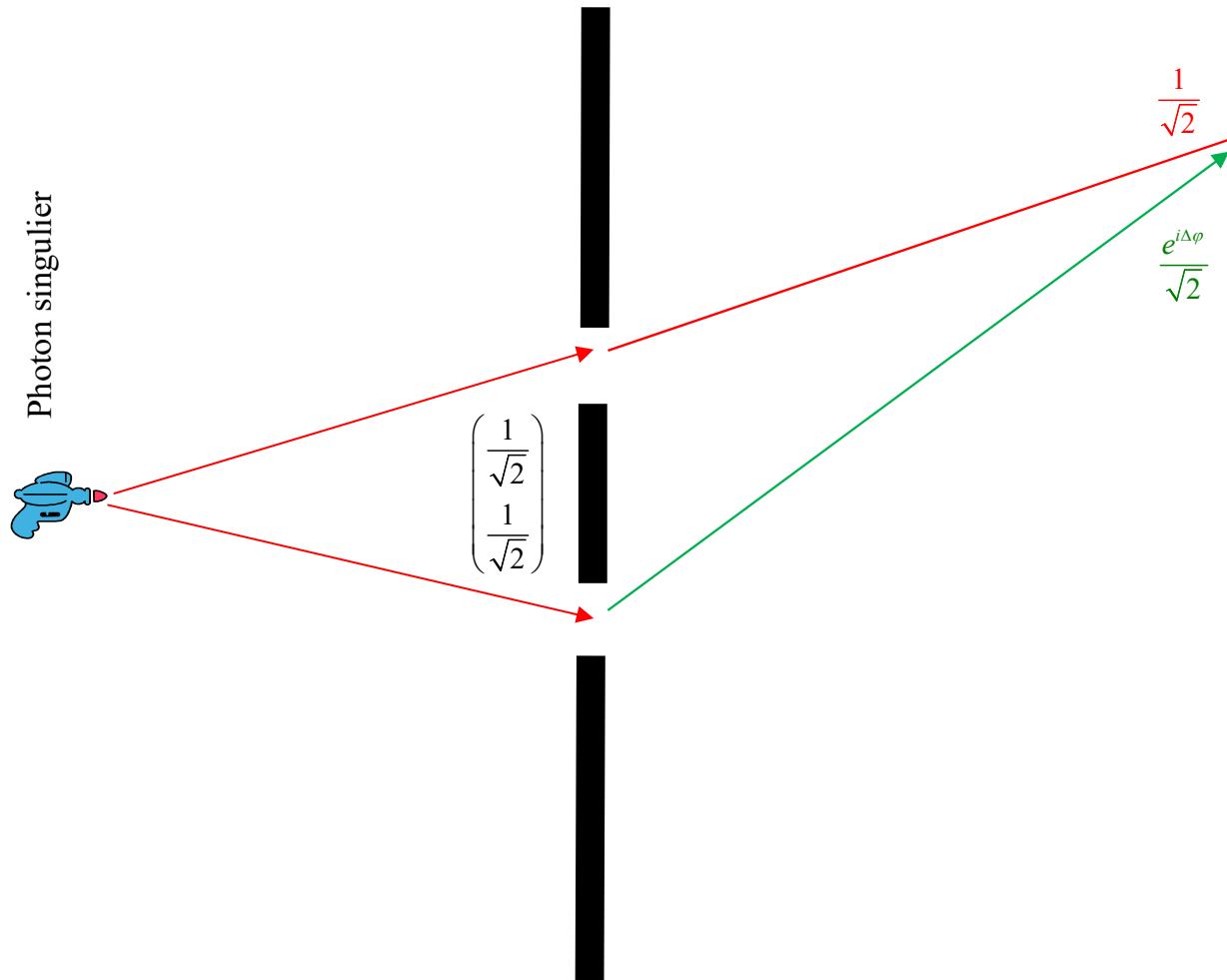


Déterminer l'Hamiltonien de  $N$  puits identiques couplés.

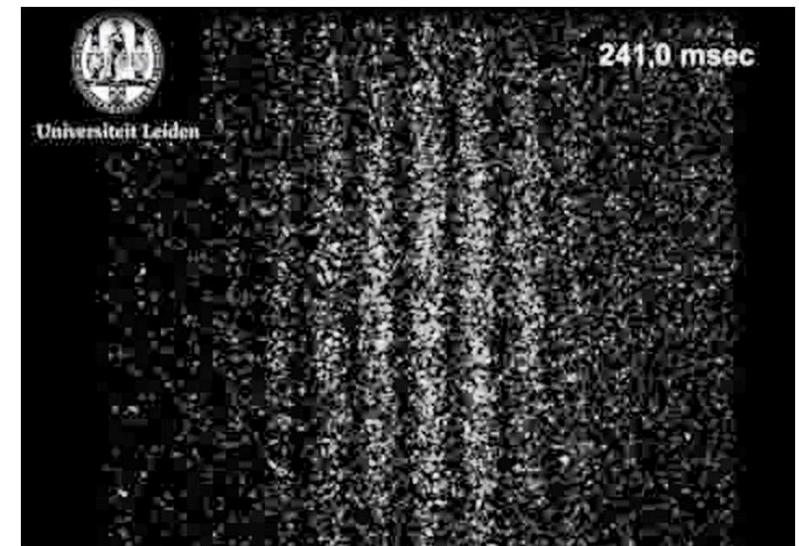


# Exercice 3.7: fentes de Young, photon singulier et non-démolition

Photon singulier



Franges d'interférence  
dans l'histogramme



**Q: que se passe-t-il si on détecte sans démolition dans une fente ?**